18/10/2018

Σημείωση: Αν A ένα σύνολο

α) Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\exists x \in A\, P(x)$ ως συντομογραφία $\exists x (x \in A \wedge P(x))$

β) Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\forall x \in A\, P(x)$ ως συντομογραφία του $\forall x (x \in A \Rightarrow P(x))$.

→ Η άρνηση της πρότασης $\forall x P(x)$ είναι η πρόταση $\exists x (\sim P(x))$

$\forall x P(x) \iff \exists x (\sim P(x))$

→ Η άρνηση της πρότασης $\exists x P(x)$ είναι η πρόταση $\forall x (\sim P(x))$ δηλαδή $\exists x P(x) \iff \forall x (\sim P(x))$.

Για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο $P(x)$ η πρόταση $\exists x \in \emptyset P(x)$ είναι ψευδής.
Η πρόταση $\forall x \in \emptyset P(x)$ είναι αληθής.

→ Για δύο σύνολα A, B η σχέση $A \subseteq B$ είναι ισοδύναμη με την $\forall x (x \in A \to x \in B)$.
Η σχέση $A = B$ είναι ισοδύναμη με την $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Αν $P(x,y)$ προτασιακός τύπος με δύο (ελεύθερες) μεταβλητές
α) Οι $\forall x P(x,y)$, $\exists x P(x,y)$ είναι προτασιακοί τύποι με μία (ελεύθερη) μεταβλητή την y.
$\forall x (x^2 \geq y)$
$\exists x (x^2 \geq y)$

β) Οι $\forall y P(x,y)$ $\exists y P(x,y)$ είναι προτασιακοί τύποι με μία (ελεύθερη) μεταβλητή την x.

γ) Οι εκφράσεις $\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$ είναι προτάσεις και μάλιστα είναι ισοδύναμες.

δ) Οι εκφράσεις $\exists x \exists y P(x,y)$ και $\exists y \forall x P(x,y)$ είναι προτάσεις οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες.

πχ Αν $P(x,y)$ είναι οι $x \leq y$ τότε η $\forall x \exists y P(x,y)$ είναι αληθής ενώ η $\exists y P(x,y)$ ψευδής.

στ) Οι εκφράσεις $\forall y \exists x P(x,y)$ και $\exists x \forall y P(x,y)$ είναι οι προτάσεις οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες

Άρα Σ και σε η δεύτερη πρόταση συνεπάγεται την πρώτη αλλά όχι η πρώτη την δεύτερη.

• Πράξεις στα σύνολα.
Αν A, B δύο σύνολα
Η τομή των A, B είναι $A \cap B = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$
Η ένωση των A, B είναι $A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$

Ιδιότητες Τομής | Ιδιότητες Ένωσης

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ

(1) $A \cap A = A$
(2) $A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετική)
(3) $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ (προσεταιριστική)
(4) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
(5) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \cap A = \emptyset$

(1) $A \cup A = A$
(2) $A \cup B = B \cup A$
(3) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
(4) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
(5) $A \cup \emptyset = A$, $\emptyset \cup A = A$.

Απόδειξη (Τομή - (2))
$A \cap B = B \cap A$
Έστω τυχαίο x

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$

χρησιμοποιήθηκε ότι
η $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge r$
είναι ταυτολογία.

Αντίστοιχα για την απόδειξη της $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ θα χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι η $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ είναι ταυτολογία.

Το γεγονός ότι η τομή είναι προσεταιριστική μας επιτρέπει να γράφουμε $A \cap B \cap \Gamma$ παραλείποντας τις παρενθέσεις. Ομοίως για την ένωση.

Δυο σύνολα λέγονται ξένα αν η τομή τους είναι το κενό ($\emptyset$) σύνολο.

• Διαφορά δύο συνόλων.

Αν A,B δυο σύνολα, η διαφορά τους είναι το σύνολο

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Δηλαδή το $A \setminus B$ περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B.

($A - B$: χρησιμοποιείται και αυτός ο συμβολισμός)

Ιδιότητες.

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B

(1) $A \setminus B \subseteq A$

(2) $A \setminus A = \emptyset$

(3) $\emptyset \setminus A = \emptyset$

(4) $A \setminus \emptyset = A$

Απόδειξη

Έστω τυχαίο x

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$

Εδώ χρησιμοποιείται ότι

η $p \wedge q \Rightarrow p$ είναι

ταυτολογία

Παρατήρηση

Από τους ορισμούς των τριών πράξεων για τυχαία A, B σύνολα και τυχαίο x έχουμε τις ισοδυναμίες.

(α) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

(β) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

(γ) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

Παρατήρηση

(α) $x \notin A \cup B \Leftrightarrow \sim(x \in A \cup B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \vee x \in B)$

$\Leftrightarrow \left(\sim(x \in A) \wedge (\sim(x \in B))\right) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$.

Εδώ χρησιμοποιείται ότι
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
είναι ταυτολογία.

(β) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim(x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \left(\sim(x \in A) \vee (\sim(x \in B))\right) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$.

Εδώ χρησιμοποιείται ότι
$(\sim(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
είναι ταυτολογία.

(γ) $x \notin A \setminus B \Leftrightarrow \sim x \in (A \setminus B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge x \notin B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge (\sim(x \in B)))$

$\Leftrightarrow \left(\sim(x \in A) \vee (\sim(\sim(x \in B)))\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sim(x \in A) \vee (x \in B)\right) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$.

Οι ιδιότητες που συνδέουν την ένωση με την τομή.

→ Επιμεριστική της τομής ως προς την ένωση για οποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ ισχύει $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

→ Επιμεριστική της ένωσης ως προς την τομή για οποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ ισχύει $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Απόδειξη

Για την πρώτη

Για τυχαίο x

$x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup \Gamma \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap \Gamma \Leftrightarrow$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Εδώ χρησιμοποιείται η

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

είναι ταυτολογία

Επομένως $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Η δεύτερη αποδεικνύεται ομοίως. Χρησιμοποιώντας ότι η $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ είναι ταυτολογία.

Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων

Ορισμός: Αν Α, Β δύο σύνολα η συμμετρική διαφορά των Α, Β ορίζεται να είναι το σύνολο $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Αν Α, Β δύο σύνολα και $P(x)$, $Q(x)$ είναι δύο προτασιακοί τύποι με σύνολα αλήθειας τα Α, Β αντίστοιχα. Δηλαδή $P(x) \Leftrightarrow x \in A$ και $Q(x) \Leftrightarrow x \in B$ να είναι αληθής για κάθε x.

Τοτε το $A \cap B$ ειναι το συνολο αληθειας του προτασιακου τυπου $P(x) \wedge Q(x)$

" " $A \cup B$ " " " " " " " $P(x) \vee Q(x)$

" " $A - B$ " " " " " " " $P(x) \wedge Q(\sim x)$

" " $A \triangle B$ " " " " " " " $P(x) \veebar Q(x)$